ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ (1η ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΜΟΡΦΗ)

PART Α'

Ασκηση 1

Έστω το σύστημα συντεταγμένων $x: U \to S$, S επιφάνεια και μάλιστα κανονική. Η απεικόνιση x είναι λεία και τέτοια ώστε $x(u,v) = (u+v, u-v, u \cdot v)$. Έστω επίσης, ο παραμετρικός μετασχηματισμός $\tilde{u} = u+v$ και $\tilde{v} = u-v$ ώστε η επιφάνεια να δίνεται από την $x(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \frac{1}{4}(\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2))$. Τότε, να εξετάσετε εάν τα θεμελιώδη ποσά 1ης τάξης της x παραμένουν αναλλοίωτα στους παραμετρικούς μετασχηματισμούς $(\tilde{u},\tilde{v})$ στο σημείο $(1,1)$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί νδο στο $(1,1)$ έχουν τα ίδια θεμελιώδη ποσά 1ης τάξης. Άρα, υπολογίζουμε για τις S και $\tilde{S}$ αντίστοιχα:

$E = \langle x_u, x_u \rangle = 2+u^2$, $F = \langle x_u, x_v \rangle = uv$, $G = \langle x_v, x_v \rangle = 2+u^2$

Συνεπώς, $E(1,1) = 3$, $F(1,1) = 1$, $G = 3$

$E^* = \langle \tilde{x}_{\tilde{u}}, \tilde{x}_{\tilde{u}} \rangle = 1 + \frac{1}{4}\tilde{u}^2$, $F^* = \langle \tilde{x}_{\tilde{u}}, \tilde{x}_{\tilde{v}} \rangle = -\frac{1}{4}\tilde{u}\tilde{v}$, $G^* = \langle x_v, x_v \rangle = 1 + \frac{1}{4}\tilde{v}^2$

Συνεπώς, $E^*(2,0) = 2$, $F^*(2,0) = 0$, $G^*(2,0) = 1$

Εφόσον, $E \neq E^*$, $F \neq F^*$, $G \neq G^*$ οι S και $\tilde{S}$ όχι τοπικά ισομετρικές στο $(u,v) = (1,0)$.

Παρατήρηση:

- Ισομετρικές επιφάνειες έχουν τα ίδια θεμελιώδη ποσά 1ης τάξης και η άρνηση αυτού
- Αν τα θεμελιώδη ποσά διαφέρουν από επιφάνεια σε επιφάνεια τότε αυτές δεν είναι ισομετρικές μεταξύ τους

Για ισομετρία θα "μιλήσουμε" στην άσκηση 3!

Ασκηση 2

Θεωρούμε την παραμέτρηση του κυλίνδρου $K = S^1 \times \mathbb{R}$

$X(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ με $X : (0,2\pi)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ και

την καμπύλη $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$ με $c : (0,2\pi) \to K$

Να βρείτε το μήκος της c μέσω των στοιχείων

της επιφάνειας $K = S^1\times\mathbb{R} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}$

Λύση

$X_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ και $X_v = (0,0,1)$

Έτσι, $\forall q = (u,v) \in (0,2\pi)\times\mathbb{R}$

$E(q) = \langle X_u(q), X_u(q)\rangle = 1$, $F(q) = \langle X_u(q), X_v(q)\rangle = 0$,

$G(q) = \langle X_v(q), X_v(q)\rangle = 1$. Άρα, η παραπάνω παραμέτρηση

είναι ορθογώνια (προφανώς $\langle X_u, X_v\rangle = 0 \Leftrightarrow X_u \perp X_v$).

με X_u, X_v ορθομοναδιαία.

Έστω επίπεδη καμπύλη $\gamma : (0,2\pi) \to (0,2\pi)\times\mathbb{R}$ όπου

$\gamma(t) = (t,t)$, $\forall t \in (0,2\pi)$. Η c γράφεται σε μορφή

$\underline{c = X\circ\gamma}$. Επίσης, για την $\gamma(t) = (u(t), v(t)) = (t,t)$

Επομένως, $u = v = t \Rightarrow u'(t) = v'(t) = 1$, $t\in(0,2\pi)$

Συνεπώς,

$$L_0^{2\pi}(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{u'(t)^2 \cdot E(\gamma(t)) + 2u'(t)v'(t)F(\gamma(t)) + v'(t)\cdot G(\gamma(t))}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+0+1}\, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Επιπλέον ερώτημα (Ασκ. 2)

Νδο ο κύλινδρος $K = S^1 \times \mathbb{R}$ είναι προσανατολίσιμος

Απάντηση:

Έστω $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεία

τότε $K = f^{-1}(0)$.

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι

$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 0)$

$f_x = 2x$, $f_y = 2y$, $f_z = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ f_z = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Το σύνολο } \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = O_z$$

Άρα, κανένα κρίσιμο σημείο της f δεν ανήκει στην $f^{-1}(0) = K$

Συνεπώς, από θεώρημα κρίσιμων σημείων η K προσανατολίσιμη επιφάνεια με προσανατολισμό:

$$N : f^{-1}(0) = K \to \mathbb{R}^3 \quad \text{τύπου} \quad N(x,y,z) = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(x,y,z) = (x,y,0)$$

Για την παρατήρηση στην 1η σελίδα, αυτολαθεί η εφαρμογή:

Άσκηση 3

Έστω S ευ περιστροφής επιφάνεια με τμήμα αυτής

$X(\theta, v) = (\cos\theta \cosh v, \sin\theta \cdot \cosh v, v)$, $0 < \theta < 2\pi$, $v \in \mathbb{R}$

και S^* ορθό κωνοειδές με τμήμα αυτού

$x^*(\varphi, u) = (u\cos\varphi, u\sin\varphi, \varphi)$, $0 < \varphi < 2\pi$, $u \in \mathbb{R}$

Να εξετάσετε αν οι επιφάνειες S και S^* είναι ισομετρικές

ΛΥΣΗ

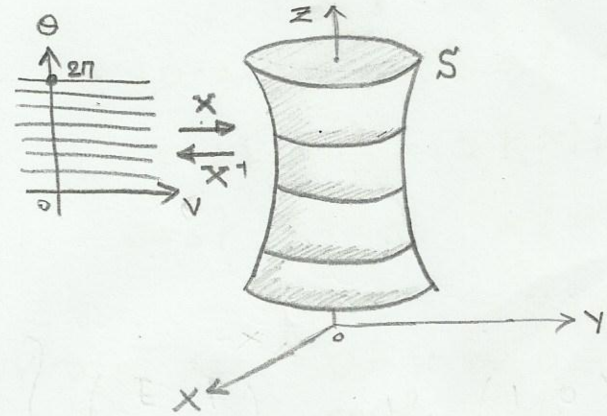
Για την <u>Εκ περιστροφής</u> (Αλυσοειδή επιφάνεια):

$X : (0,2\pi)\times\mathbb{R} \to S$ με $X(\theta,v) = (\underbrace{\cos\theta\cdot\cosh v}_{x}, \underbrace{\sin\theta\cosh v}_{y}, \underbrace{v}_{z})$
συστ. συντ/νων. Παίρνουμε:

$$x(\theta,v)^2 + y(\theta,v)^2 = x^2+y^2 = \cosh^2 v = \cosh^2 z \Rightarrow$$

$\Rightarrow (S): x^2+y^2 = \cosh^2 z$ όπου $S = f^{-1}(0)$ με $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τύπου

$f(x,y,z) = x^2+y^2-\cosh^2 z$.



$X_\theta = (-\sin\theta\cosh v, \cos\theta\cosh v, 0)$

$X_v = (\cos\theta\cdot\sinh v, \sin\theta\sinh v, 1)$

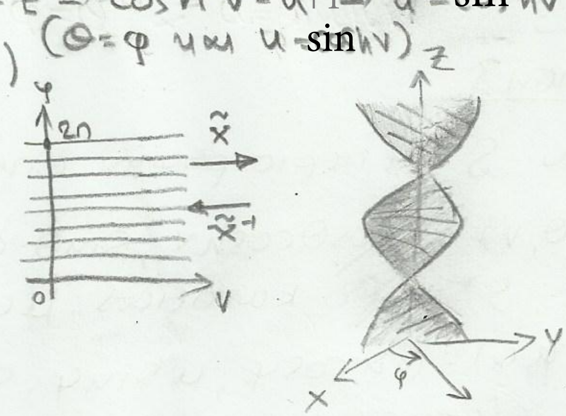
$E = \langle X_u, X_u\rangle = \cosh^2 v$

$F = \langle X_u, X_v\rangle = 0$

$G = \langle X_v, X_v\rangle = \sinh^2 v + 1 = \cosh^2 v$.

Για το <u>ορθό κωνοειδές</u> (Ελικοειδής επιφάνεια) δεν προκύπτει άμεσο συμπέρασμα

$\tilde{X} : (0,2\pi)\times\mathbb{R} \to \tilde{S}$ με $\tilde{X}(\varphi,u) = (\underbrace{u\cos\varphi}_{x}, \underbrace{u\cdot\sin\varphi}_{y}, \underbrace{\varphi}_{z})$
σύστ. συντ/νων. Παίρνουμε:
την απεικόνιση φ που στέλνει το $X(\theta,v)$ της S στο τμήμα $\tilde{x}(\varphi,u)$ της $\tilde{S}$ (Θέλω $E=\tilde{E} \Rightarrow \cosh^2 v = u^2+1 \Rightarrow u = \sinh v$) (θ=φ και $u=\sinh v$)
τύπου: $\varphi(\theta,v) = (\varphi,u) = (\varphi, \sinh v)$
όπου $\hat{X} = \tilde{X}\circ\varphi$ συστ. συντ/νων
της $\tilde{S}$ όπου



$\hat{X}(\theta,v) = \tilde{X}(\varphi(\theta,v)) = \tilde{X}(\varphi,\sinh v) =$
$= (\cos\theta\sinh v, \sin\theta\cdot\sinh v, \theta)$.
και τέτοια ώστε:

$\left.\begin{aligned} \hat{E} &= \cosh^2 v = E \\ \hat{F} &= 0 = F \\ \hat{G} &= \cosh^2 v = G \end{aligned}\right\}$ Οι επιφάνειες είναι ισομετρικές

Άρα, η φ ισομετρία της $X(U)$ επί της $\tilde{X}(U)$

Επιπλέον Ερώτημα (Ασκ.3)

Έστω S το επίπεδο xy και $\tilde{S}$ ο κυκλικός κύλινδρος με ακτίνα τη μονάδα και άξονα τον z. Το επίπεδο έχει μορφή $P = P_0 + u w_1 + v w_2$ με w_1, w_2 στο επίπεδο, ορθομοναδιαία. Έστω τμήμα $x: \mathbb{R}^2 \to S$ όπου $x(u,v) = p_0 + u w_1 + v w_2$ του επιπέδου. Ο ορθός κύλινδρος έχει μορφή $x^2+y^2=1$ με τμήμα $\tilde{x}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$, $\tilde{x}: (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. $\tilde{x}$ και x είναι συστήματα συντεταγμένων. Είναι οι S και $\tilde{S}$ ισομετρικές;

Απάντηση:

Για το επίπεδο:

$E = \langle x_u, x_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = 1$

$F = \langle x_u, x_v \rangle = 0$ (κάθετα)

$G = \langle x_v, x_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1$

Για τον κύλινδρο:

$\tilde{E} = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle = 1$

$\tilde{F} = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle = 0$

$\tilde{G} = \langle \tilde{x}_v, \tilde{x}_v \rangle = 1$

Είναι τοπικά ισομετρικές. (Αφού διατηρούν τα μήκη των τόξων)

Αλλά όχι ισομετρικές διότι η $\varphi: S \to \tilde{S}$ δεν είναι 1-1

Άσκηση 4

Δίνεται η παραμέτρηση:

$x(u,v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v)$, $(u,v) \in (a,b) \times (0,2\pi)$.

με $h(u) > 0$, $g'(u) \neq 0$ και $g'(u)^2 + h'(u)^2 = 1$, $\forall u \in (a,b)$.

Νδο όλες οι κάθετοι της επιφάνειας που παράγεται από την x, τέμνουν τον άξονα x.

ΛΥΣΗ

Η κάθετος στο p_0 είναι:

$$n_{p_0}(t) = p_0 + t \cdot \underbrace{N(p_0)}_{\text{μον. κάθετο}} \quad (1).$$

$X_u = (g'(u), h'(u)\cdot \cos v, h'(u) \sin v)$

$X_v = (0, -h(u)\sin v, h(u)\cdot \cos v)$

$X_u \times X_v = (h(u)\cdot h'(u), -g'(u)\cdot h(u)\cos v, -g'(u) h(u) \sin v)$

$\|X_u \times X_v\| = h(u)$

Άρα, το μοναδιαίο κάθετο στο $p_0 = X(u_0, v_0)$ της επιφάνειας είναι το:

$$N(p_0) = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|}(X_u \times X_v) = (h'(u_0), -g'(u_0)\cos v_0, -g'(u_0)\sin v_0)$$

Άρα, η ① γίνεται:

$$\eta_{p_0}(t) = (g(u_0) + t h'(u_0), (h(u_0) - g'(u_0)t)\cos v_0, (h(u_0) - g'(u_0)t)\sin v_0)$$

Όπου για $t = \dfrac{h(u_0)}{g'(u_0)}$ παίρνουμε το σημείο

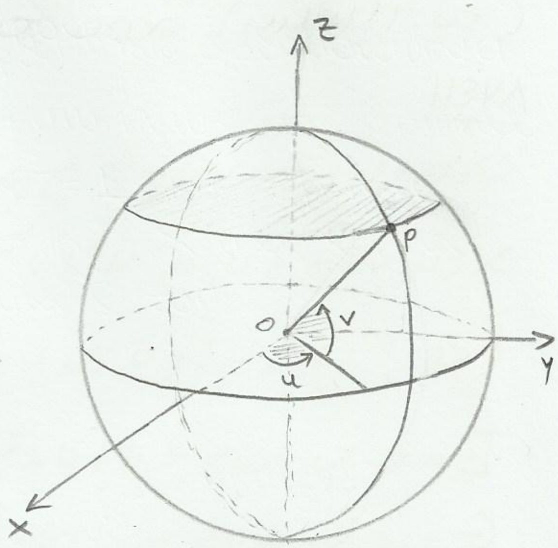
$\left(g(u_0) + h'(u_0)\dfrac{h(u_0)}{g'(u_0)}, 0, 0\right)$ της κάθετης ευθείας

όπου προφανώς τέμνει τον άξονα των x

Άσκηση 5

Να βρεθεί το εμβαδόν της σφαίρας κέντρου Ο και ακτίνας r>0.

ΛΥΣΗ



Χρησιμοποιούμε την παραμέτρηση

$X : U = (\overbrace{0,2\pi}^{u\in}) \times (\overbrace{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}}^{v\in}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$X(u,v) = (r\cos v \cos u, r\cos v \sin u, r\sin v)$

(σφαιρικές συντεταγμένες)

Η X παραμέτρηση μιας επιφάνειας εκ περιστροφής που προκύπτει από περιστροφή ενός ημικυκλίου γύρω από τον άξονα z. (Η γωνία u μετράει το <u>γεωγραφικό μήκος</u> δηλ. προσδιορίζει το μεσημβρινό ενός χωρίου, η γωνία v μετράει το <u>γεωγραφικό πλάτος</u> ενός χωρίου)

Η παραπάνω παραμέτρηση καλύπτει ολόκληρη τη σφαίρα εκτός από το μέγιστο ημικύκλιο όπου το εμβαδόν του είναι προφανώς 0.

$X_u = (-r\cos v \cdot \sin u, r\cos v \cdot \cos u, 0)$

$X_v = (-r\sin v \cdot \cos u, -r\sin v \sin u, r\cos v)$

Έτσι,

$E = \|X_u\|^2 = r^2\cos^2 v$, $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$ (αφού οι παραμετρικές καμπύλες τέμνονται κάθετα μεταξύ τους)

$G = \|X_v\|^2 = r^2$. Άρα, έχουμε ότι:

$$Εμβ.(S^2) = \iint_U \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv = \iint_U \sqrt{r^4\cos^2 v}\, du\, dv =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \cos v\, du\, dv = r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} du \right) \cos v\, dv = 4\pi r^2$$

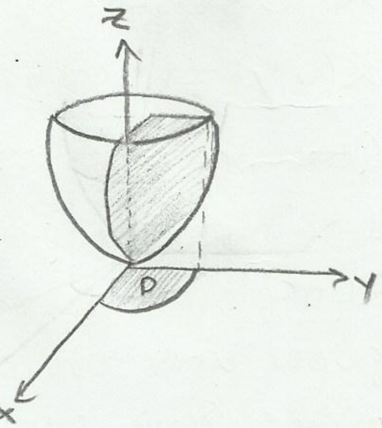
Ασκηση 6

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος K του παραβολοειδούς $z=x^2+y^2$, όπου καθορίζεται αυτό (το τμήμα) απο τις συνθήκες $x,y\geq 0$ και $z\in[0,1]$

ΛΥΣΗ

Όπως $z=x^2+y^2$ γράφημα τοτε παίρνω παραμέτρηση

$X(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$



Έτσι, $X_u=(1,0,2u)$, $X_v=(0,1,2v)$

$E=\langle X_u,X_u\rangle=1+4u^2$, $F=\langle X_u,X_v\rangle=4uv$

$G=\langle X_v,X_v\rangle=1+4v^2$.

Το χωρίο (τμήμα).

$D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u,v\geq 0 \text{ και } 0\leq u^2+v^2\leq 1\}$

Έτσι, Αναλυτω:

$$\text{Εμβ.}(K)=\iint_D \sqrt{1+4u^2+4v^2}\,du\,dv \quad (1)$$

Πολικές Συντεταγμένες

$u=\rho\cos\theta$ και $v=\rho\sin\theta$, $0\leq\rho\leq 1$, $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$$(1)\ \text{Εμβ}(K)=\int_0^1\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+4\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(\rho,\theta)}\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^1\int_0^{\pi/2}\rho\cdot\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\theta=\frac{\pi}{24}(5\sqrt{5}-1).$$

Άσκηση 7

Έστω S κανονική επιφάνεια και σύστημα συντ/νων

$X : \mathbb{R}^2 \to X(\mathbb{R}^2)$ με αντίστοιχη θεμελιώδη μορφή

$E(u,v) = 1+u^2$, $F(u,v) = -uv$, $F(u,v) = 1+v^2$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

i) Έστω καμπύλη $\alpha(t) := X(t,2t)$.

Νδο για $t_0=0$ το μήκος τόξου της α είναι ισο

$S(t) = \int_0^t \sqrt{5+9w}\, dw$

ii) Εάν $D = \{(u,v) \mid u^2+v^2<2\}$ ποιο το εμβ$(X(D))$

iii) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η καμπύλη a με την καμπύλη $b(s) = X(1,s)$

ΛΥΣΗ

i) Όπως και στην άσκηση 2.

Έστω επίπεδη καμπύλη $\tilde{a}(t) = (u(t), v(t)) = (t, 2t)$

ώστε $a = X \circ \tilde{a}$:

$$S = \int_0^t \|a'(w)\|\, dw = \int_0^t \sqrt{u'(w)^2 E(\tilde{a}) + 2u'(w)v'(w)F(\tilde{a}) + v'(w)^2 G(\tilde{a})}\, dw$$

$$= \int_0^t \sqrt{u'(w)^2 E(w,2w) + 2u'(w)v'(w)F(w,2w) + v'(w)^2 G(w,2w)}\, dw =$$

$$= \int_0^t \sqrt{E(w,2w) + 4F(w,2w) + 4G(w,2w)}\, dw =$$

$$= \int_0^t \sqrt{1+w^2-8w^2+4+16w^2}\, du = \int_0^t \sqrt{5+9w}\, dw$$

ii) $EG-F^2 = 1+u^2+v^2$

$$\text{Εμβ}(X(D)) = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\, du dv = \iint_D \sqrt{1+v^2+u^2}\, du dv$$

Πολικές Συντ/νες

$\rho\cos\theta = u$ & $\rho\sin\theta = v$, $\rho\in[0,2]$ & $\theta\in[0,2\pi]$

$$\text{Εμβ}(X(D)) = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+\rho^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(\rho,\theta)}\, d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho d\theta = \pi\int_0^2 2\rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1).$$

iii) Οι καμπύλες α, β τέμνονται προφανώς (αφού σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους) στο σημείο p. Δηλαδή

$$p = \alpha(t) = \beta(s) \Leftrightarrow X(t,2t) = X(1,s) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} (t,2t) = (1,s) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t=1$ και $s=2$.

Άρα, $p = \alpha(1) = \beta(2) = X(1,2)$.

<u>Για την α καμπύλη:</u>

$$\alpha'(t) = (X\circ\tilde{\alpha})'(t) = dX(\tilde{\alpha}(t))\cdot\tilde{\alpha}'(t) = dX(t,2t)\cdot(1,2) =$$

$$= \left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\right)\Big|_{(t,2t)}\cdot(1,2) = X_u(t,2t) + 2X_v(t,2t).$$

Άρα,

$$\|\alpha'(t)\| = \|X_u(t,2t)+2X_v(t,2t)\| = \langle X_u(t,2t)+X_v(t,2t), X_u(t,2t)+X_v(t,2t)\rangle^{1/2} =$$

$$= \left(\langle X_u(t,2t), X_u(t,2t)\rangle + 4\langle X_u(t,2t), X_v(t,2t)\rangle + 4\langle X_v(t,2t), X_v(t,2t)\rangle\right)^{1/2} =$$

$$= \left(E(t,2t) + 4F(t,2t) + 4G(t,2t)\right)^{1/2} \xRightarrow{t=1}$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(1)\| = \left(E(1,2) + 4F(1,2) + 4G(1,2)\right)^{1/2} = \sqrt{14}$$

Παρόμοια για την β. έχουμε:

$\beta'(s) = (x \circ \bar{\beta})'(s)$ όπου $\bar{\beta}$ μία επίπεδη καμπύλη

και τέτοια ώστε $\bar{\beta}(s) = (1, s)$

Άρα,

$$\beta'(s) = (x \circ \bar{\beta})'(s) = dx(\bar{\beta}(s))\bar{\beta}'(s) = (dx(1,s))(0,1) = x_v(1,s)$$

οπότε για $s=2$

$$\|\beta'(2)\| = \|x_v(1,2)\| = \langle x_v(1,2), x_v(1,2)\rangle^{1/2} = G(1,2)^{1/2} = \sqrt{5}.$$

Έτσι,

$$\langle a'(1), \beta'(2)\rangle = \langle x_u(1,2) + 2x_v(1,2), x_v(1,2)\rangle =$$

$$= \langle x_u(1,2), x_v(1,2)\rangle + 2\langle x_v(1,2), x_v(1,2)\rangle =$$

$$= F(1,2) + 2G(1,2) = -2 + 10 = 8$$

Τελικά,

$$\cos\theta = \frac{\langle a'(1), \beta'(2)\rangle}{\|a'(1)\| \cdot \|\beta'(2)\|} = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{70}}$$